

Mengenlehre

Darstellung: $M = \{2, 4, 6, \dots, 20\}$ oder $M = \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$

Potenzmenge: alle Teilmengen z.B. $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Kardinalität: $|M|$ ist Anzahl der Teilmengen mit $= 2^n$

Symbole:

$M \subset N$ echte Teilmenge Elemente von M in N

$M \subseteq N$ Teilmenge jedes Element von M in N

$A \cup B$ Vereinigung $\{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

$A \cap B$ Durchschnitt $\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \setminus B$ Differenz $\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

$\bar{A}$ Komplement $= M \setminus A$

Kartesisches Produkt: Kombination aus Mengen

z.B. $A_1 = \{a, b, c\}$ und $A_2 = \{1, 2\}$

$\hookrightarrow A_1 \times A_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Zahlenmengen:

- $\mathbb{N}$ = natürliche, $\mathbb{Z}$ = ganze, $\mathbb{Q}$ = rationale, $\mathbb{R}$ = reelle,
 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ = irrational
- Intervalle: $[a, b]$ - abgeschlossenes
 $[a, b)$ - halboffene Intervalle
 (a, b) - offenes
- Zahlensysteme: Binär, Hexa, b-Ärlich
Binär in Hex: 4 nuller sind 1 hex

Regeln:

Kommutativg.: $A \cap B = B \cap A$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativg.: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Distributivg.: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Morgansche: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Weitere Regeln: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \text{und} \quad A \cup \bar{A} = M$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{und} \quad A \cup \emptyset = A$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Kartesisches: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Menge: $|P(A)| = 2^{|A|}$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Sonderfall: $A - B = A \setminus B$

Finanzmathematik

Zinsrechnung:

K = Kapital ; n = Jahre ; p = Zinssatz ; K_n = Endkapital

$$K_n = K \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$$

mit Zinseszins:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

dann gilt auch:

$$K = K_n \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$$

$$n = (\ln K_n - \ln K) : (\ln(1 + \frac{p}{100}))$$

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K}} - 1\right)$$

~~Rentensparzeitrag~~

wird auch ohne Rentenzusammenhang verwendet, immer wenn es um jährliche Auszahlungen geht

r = Auszahlung / Jahr ; q = Aufzinsungsfaktor;

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$~~K_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}~~ $K = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)}$$$

$$r = K \cdot \frac{q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

$$n = \left(\ln \frac{r}{r - K(q - 1)}\right) : (\ln q)$$

Rentensparvertrag:

r = einzuzahlende Rate;

$$Kn = r q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{mit } q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$r = \frac{Kn \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)}$$

$$n = \left(\ln \left(\frac{Kn \cdot (q - 1)}{r q} + 1 \right) \right) : (\ln q)$$

Matrizen

Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots \\ a_{21} + b_{21} & \dots & \dots \\ a_{31} + b_{31} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Multiplikation:

das r-fache

$$r \circ A = \begin{pmatrix} r a_{11} & r a_{12} \\ r a_{21} & \dots \end{pmatrix}$$

mit Matrize:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Matrix ist symmetrisch wenn $A = A^T$

Determinante (det):

Berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A_{31} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot A_{11} - 2 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31}$$

Eigenschaften:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Bei dreiecks Matrix: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots$

$$\text{z.B.: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertierung:

Matrix ist invertierbar wenn $\det \neq 0$

Einheitsmatrix I : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Es gilt: $A \cdot I = I \cdot A = A$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Gleichung z.B.: $(X - A) \cdot B^{-1} = A$

$$\Rightarrow X - A = A \cdot B$$

$$\Rightarrow X = A \cdot B + A$$

Invertieren: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix: Wenn in Dreiecksform (Gauß Algo) dann ist r die Anzahl der Zeilen, die keine Nullzeilen sind

$$\text{Rg}(A) = r$$

wenn $r=n$, voller Rang ($\Rightarrow$ invertierbar)

Definite Matrizen: positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = \det(2) = 2 ; H_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$H_3 = (\text{alles}) = 6 \Rightarrow \text{positiv definit}$$

Anwendung Determinante:

• Es gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

• Vektoren lineare unabhängigkeit, wenn zusammengefasste Matrix $\det \neq 0$

• Cramersche Regel: Gleichungssystem lösbar wenn deren $\det \neq 0$

Komplexe Zahlen

Normalform = $a + b \cdot i$

dabei ist $i = \sqrt{-1}$

Komplexe Zahl einer Gleichung:

1. Gleichung umstellen auf $0 =$

z.B. $0 = x^2 - 4x + 13$

2. x werte mit pq Formel bestimmen

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}$$

3. i erkennen und anwenden

$$= 2 \pm \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow 2 \pm 3 \cdot i$$

$$x_1 = 2 + 3i \quad ; \quad x_2 = 2 - 3i$$

4. Winkel berechnen

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 56,31^\circ$$

5. Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} = |z|$$

$$z = \sqrt{13} \cdot (\cos 56,31^\circ + i \cdot \sin 56,31^\circ)$$

$$\hookrightarrow = \cancel{\sqrt{13}} \cdot 2,000 + i \cdot 3,000$$

6. Anzahl Lösungen

$\overset{n-1}{n}$ mal 360° addieren (Anzahl Lösungen = n)

für $\sqrt[n]{z}$

z.B. wenn 3te Wurzel gesucht $\rightarrow$ 3 Ergebnisse

Rechnen mit komplexen Zahlen

Normalform: $a + b \cdot i$

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C}$

Summe:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + (b + d)i$$

Differenz:

$$(a + ib) - (c + id) = a - c + (b - d)i$$

Produkt:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Quotienten:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Quadrieren:

$$(a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2 \quad \text{|| Nur für } z, \text{ sonst FSS. 15}$$

Betrag $|z|$ berechnen:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

|| Wurzel nicht ausrechnen

Winkel φ berechnen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \dots \quad \text{|| Siehe Tabelle}$$

Zurück rechnen von $\varphi \rightarrow$ Polar normal:

$$\begin{aligned} z &= |z| \cdot (\underbrace{\cos \varphi}_a + i \cdot \underbrace{\sin \varphi}_b) \\ &= a + i \cdot b \end{aligned}$$

Polarkoordinaten darstellung:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Rechnen mit Polarkoordinaten

Multiplizieren:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Quotienten:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Potenz:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

Wurzel: die n-te Wurzeln aus z

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n})$$

Es gibt immer n Ergebnisse mit $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Prüfen ob Zahl eine n-te Wurzel aus sich selbst:

Zahl a ist eine n-te Wurzel aus b wenn

$$a = b^{\frac{1}{n}}$$

Bogenmaße:

$$2\pi = 360^\circ$$

$$\text{Bogenmaß} = \underbrace{90^\circ}_{\text{Winkel}} \cdot (\pi / 180^\circ) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Gradmaß} = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Bogen}} \cdot (180^\circ / \pi) = 45^\circ$$

Integralrechnung

Das Berechnen von Flächeninhalt zwischen Kurve und x

Grundsätze:

$$\bullet \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b \gamma \cdot f(x) dx = \gamma \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet c \in [a, b], \text{ dann } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Bestimmte Integrale berechnen:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Mittelwertsatz:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Differenzierbarkeit:

$$\text{wenn } \underline{F(x)} = \int_a^x f(t) dt, \text{ dann } \underbrace{F'(x)}_{\text{Stammfunktion}} = f(x)$$

$$\hookrightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln:

- Partielle Integration Stammform von f'

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

- Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) dg$$

- Partialbruchzerlegung

Bsp: $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + B_1x(x-1)^2 + B_2x(x-1) + B_3x$$

Nullstellen Einsetzen um zu ermitteln

↳ dann wieder oben einsetzen mit "Sudavor"

Differentialrechnung

= Bestimmen einer Ableitung (Differenzieren)

Regeln:

Linearität:

Für PLUS und MINUS sowie (Multiplizieren mit Zahl) gilt:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kettenregel:

Für Verkettungen h gilt: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableiten

Es gilt:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(a) = n \cdot a^{n-1}$$

Grenzwert:

Berechnung sieht so aus:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2-4} \right)$$

Berechnen indem man x einsetzt

Wenn bei $\frac{g(x)}{h(x)}$ beides 0 oder ∞ : Regel (l'Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{h'(x)} \quad \begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \text{Nenner} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Zähler darf } 0 \text{ sein} \\ \text{Nenner nicht} \end{array}$$

Kann mehrfach angewendet werden

Differenzierbarkeit:

Funktion f ist differenzierbar wenn Grenzwert existiert.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ist Steigung zwischen 2 Punkten

Tangente:

$$(\cancel{f(x)} = \cancel{f'(a) \cdot x} + (\cancel{f(a)} - \cancel{f'(a) \cdot a}))$$

gilt wenn $f(x)$ an a differenzierbar

$$\text{neu: } \cancel{f(x)} = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = y$$

Normale:

gilt wenn $f(x)$ an a differenzierbar

$$\text{wenn } f'(a) = 0 \rightarrow x = a \quad \begin{array}{l} x \text{ meist gegeben, } y \\ \text{berechnen durch einsetzen} \end{array}$$

$$\text{wenn } f'(a) \neq 0 \rightarrow n(x) = - \frac{1}{f'(a)} \cdot x + \left(f(a) + \frac{a}{f'(a)} \right)$$

$$y = mx + c = y = \frac{1}{f'(a)} \cdot x + c \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{nach } c \text{ auflösen} \\ \text{und dann einsetzen} \end{array} \quad \begin{array}{l} m \cdot x \\ y = \frac{1}{f'(a)} \cdot x + c \end{array}$$

Ableitung:

wenn $f'(x) \neq 0$, dann gilt (und $f(a) = b$)

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Extremstellen (Differentialrechnung)

1. Ableitung bilden $f(x) \rightarrow f'(x)$
2. Nullstellen von $f'(x)$ finden
 $\hookrightarrow f'(x) = 0 \rightarrow$ Extremstellen für x
3. Ableitung $f''(x)$ bilden und Extremstellen einsetzen:
 $f''(x) > 0 \rightarrow$ lokales Minimum
 $f''(x) < 0 \rightarrow$ lokales Maximum
 $f''(x) = 0 \rightarrow$ weiter Ableiten
wenn $f^n(x)$, n ungerade $\rightarrow$ kein Extremum

Wendepunkte

1. Zweite Ableitung bilden $f(x) \rightarrow f''(x)$
2. Nullstellen von $f''(x)$ berechnen
3. Nullstellen in $f'''(x)$ einsetzen
wenn $f'''(x) \neq 0$, dann Wendepunkt
wenn bei $f^n(x)$, n gerade $\rightarrow$ kein Wendepunkt

Sattelpunkt

wenn f an Wendepunkt eine Tangente ($f'(a) = 0$)
so nennt man Wendepunkt auch Sattelpunkt
Voraussetzung: Wendepunkt

Mittelwert berechnen:

$a < b$ und $[a \text{ und } b]$ sind ein definierter Bereich

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Eigenschaften Monotonie

I ist Bereich wenn für alle $x \in I$ gilt $\rightarrow$ dann

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow \text{monoton steigend}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

$$f'(x) \leq 0 \rightarrow \text{monoton fallend}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow \text{streng monoton fallend}$$

Vollständige Induktion

Summenformel

$$\text{Bsp.: } 5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

Anfang: für kleinste Zahl $\rightarrow n=1$

Linke Seite

$$LS = 1 \cdot 5^1 = 5$$

Rechte Seite

$$RS = \frac{5 + (4 \cdot 1 - 1) \cdot 5^{1+1}}{16} = 5$$

Schluss: für $n=(n+1)$ beweisen

$$\begin{aligned} \underline{5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n} + (n+1) \cdot 5^{n+1} &= \frac{5 + (4(n+1) - 1) \cdot 5^{n+1+1}}{16} \\ &= \frac{5 + (4n+3) \cdot 5^{n+2}}{16} \end{aligned}$$

$$LS = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16} + (n+1) \cdot 5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1} + 16 \cdot (n+1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

| kann addiert werden

$$= \frac{5 + (20n+15) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

$$| 5^{n+1+1} = 5 \cdot 5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n+3) \cdot 5^{n+2}}{16}$$

Achtung!:

- n überall auf $(n+1)$, mit Klammern