

# Die goldenen Lernzettel für Mathe 1

## 1.1. Mengen (gesetze)

### Kommutativgesetz

Def: Die Reihenfolge der Mengen spielt bei "U" und "n" keine Rolle.

$$\text{Form: } A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\text{Bsp: } A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} = B \cup A$$

$$A \cap B = \{2\} = B \cap A$$

### Assoziativgesetz

Def: Die Klammerung ist bei U und n egal.

$$\text{Form: } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{Bsp: } A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3\} = A \cup (B \cup C)$$

### Distributivgesetze

Def: n und U lassen sich ineinander verteilen.

$$\text{Form: } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{Bsp: } A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{2, 4\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2\} \cup \{2\} = \{2\}$$

## Idempotenzgesetze

Def: Die Verbindung einer Menge mit sich selbst ändert nichts.

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

## Neutralitätsgesetze

Def: Leere Mengen und Grundmengen wirken neutral.

Form:  $A \cup \emptyset = A$

$$A \cap M = A$$

Bsp:  $A = \{1, 2\}$ ,  $\emptyset = \{\}$   
 $A \cup \emptyset = \{1, 2\}$

## Absorptionsgesetze

Def: Eine Menge schluckt eine Teilmenge.

Form:  $A \cup (A \cap B) = A$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Bsp:  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$

$$A \cup (A \cap B) = \{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$$

## Komplementgesetze

Def: Vereinigung und Schnitt mit dem Komplement haben feste Ergebnisse.

Form:  $A \cup \bar{A} = M$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Bsp:  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $\bar{A} = \{3, 4\}$

$$A \cup \bar{A} = \{1, 2, 3, 4\} = M$$

## Doppeltes Komplement

Def: Das Komplement vom Komplement ist wieder die ursprüngliche Menge.

Form:  $\bar{\bar{A}} = A$

Bsp:  $A = \{1, 2\}$ ,  $M = \{1, 2, 3\}$

$\bar{A} = \{3\}$ ,  $\bar{\bar{A}} = \{1, 2\} = A$

## Die Morganischen Gesetze

Def: Komplement von  $U$  und  $n$  kehrt um.

Form:  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$  zu DeMorgan

Bsp: nicht erforderlich

$\overline{A \cap B} = A \cap \bar{B}$

### Häufige Klausufälle

Vereinfachungen

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (B \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

$$A \cup (B \cap A) = A$$

$$A \cap (B \cup A) = A$$

$$A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

Fälle:

$$(A \cup B) \cap A$$

$$= (\emptyset \cup A) \cup (B \cap A) =$$

$$= A \cup (A \cap B)$$

$$= A$$

## Vollständige Induktion

### ① Induktionsanfang (A)

$n = 1$  setzen  $n = \text{niedrigste definierte Zahl } n \in \mathbb{N}$

### ② Induktionsvoraussetzung (V)

Von 1. f. passt, einmal folgendes feststellen.

$\exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 0$

[Gleichung abschreiben]  $\rightarrow$  Voraussetzung

### ③ Induktionsabschritt (S)

$n = n+1$  setzen  $\rightarrow$  Behauptung

Es gilt zu beweisen, dass die Behauptung aus der Voraussetzung folgt.

links Behauptung ist  $n+1 = n$  setzen.

Anschließend kann man, wenn man links in Summe

hat

$\sum_{i=1}^{n+1} f(i) = \sum_{i=1}^n f(i) + f(n+1)$

Danach auflösen

Lösung

$$IV + (n+1) = IS = IV_r + n+1$$

## Basics

### Brüche

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

### Potenzen und Wurzeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad , \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (\text{für } a \geq 0)$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

### Logarithmen

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x \quad (\text{für } a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad , \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x) \quad , \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

### Binomische Formeln

$$1. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

### Komplexe Zahlen

Normalform:  $z = a + bi$   $a, b \in \mathbb{R}$   $i^2 = -1$   $a = \operatorname{Re}(z), b = \operatorname{Im}(z)$

Konjugation:  $\bar{z} = a - bi$   $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$  (reell)

## Matrizen

### Addition und Subtraktion

$$A + B = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-b \\ a-b & a-b \end{pmatrix}$$

### Multiplikation

Anzahl Spalten A = Anzahl Zeilen B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{1 \quad 3}^1 \\ \overbrace{2 \quad 4}^2 \\ \hline \overbrace{-}^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overbrace{9 \quad -1}^1 \\ \overbrace{2 \quad 5}^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \quad 5 \\ -1 \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+1=1 \\ 2+2=3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \end{array}$$

### Rechenregeln

Assoziativ

$$A(BC) = (AB)C$$

Distributiv

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

Nicht Kommutativ

$$AB \neq BA$$

## Determinante

Det. nach Sarrus auflösen.

Sarrus nur möglich bei  $3 \times 3$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & ab \\ d & e & f & de \\ g & h & i & gh \end{array}$$

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (g \cdot e \cdot c + h \cdot f \cdot a + i \cdot d \cdot b)$$

Def  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

Def  $4 \times 4$

Nach Zeile oder Spalte auflösen

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & + & - & + & - \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & - & + & - & + \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & M_1 & + & - & + \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & & - & + & - \end{array}$$

$$+ a_1 \cdot \det M_1 - a_2 \cdot \det M_2 + a_3 \cdot \det M_3 - a_4 \cdot \det M_4$$

$M(3 \times 3)$  Matrix mit Sarrus lösen

# Inverse der Matrix

- 921.02

Inverse  $A^{-1}$

Einheitsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Wenn  $\det(A) \neq 0$  ist, dann invertierbar

Berechnung

$$\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 & 1 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 & 0 & 0 1 \end{array}$$

Folge:

① 1 Pivotzeile auf 1 bringen  
→ per Tausch oder Division

Pivotzeile immer  
als erstes normieren

② Alle Einträge unter Pivot zu 0 machen  
→ Nur mit Addition/Subtraktion einer Zeile

$$\text{Zeile 2} = \text{Zeile 2} - (\text{Zeile 1}) * \text{Zeile 1}$$

③ Zweite Pivotposition auf 1 bringen  
→ Zeile 2  $\div$  Pivotwert

④ Alle Einträge über dem zweiten Pivot zu 0 machen  
→ nach oben Eliminieren

Eine Pivotzeile wird nicht verändert nach 1  
in einer Zeile

3

# Matrix mit einem unbekannten

## Typische Klausuraufgaben

- ① - Wie geht man mit dem  $x$  beim Rechnen der Determinante/Inverse  $\rightarrow$  um?
- ② - Für welche Werte des  $x$  die Matrix invertierbar/nicht invertierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}$$

- ① Nicht invertierbar

Die  $\text{Def}(A) = 0$  setzen und auflösen.

(Einfach erstmal  $4 \times 4$  Matrix det berechnen)

Invertierbar

Die übrigen Schritte und feststellen

Die Matrix  $(A)$  mit den Parametern  $x \in \mathbb{R}$ .

Ist für alle  $x \neq [\text{Ergebnis}]$  invertierbar.

- ① Gleiche Berechnungen wie bei ②

## Typisch Matrizenaufgaben - Gleichalte

$$A^T = \text{transponierte Matrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

## Skalarmultiplikation

$$k \cdot C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

## Addition und Subtraktion

$$A - B \Rightarrow \text{Müssen gleich groß sein}$$

## Komplexe Kombinationen

- Bestimmen sie die Matrix X

$$= B \cdot (X - B) \cdot A = B \quad | \cdot B^{-1}$$

$$= B^T \cdot B (X - B \cdot A = B \cdot B^{-1})$$

$$= I (X - B) \cdot A = B I \quad | \cdot A^{-1}$$

$$= (X - B) \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$$

$$= (X - B) I = A^{-1}$$

$$= X - B = A^{-1}$$

$$= X = A^{-1} + B$$

I ist eine  
Neutrale Einheit  
vergleichbar mit  
1  
 $\Rightarrow A \cdot 1 = 1$

## Liniare Gleichungen

Ziel ist es das Liniare Gleichungssystem in eine Dreiecksform zu bringen  
→ erweiterte Matrix

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 4z = 6 \\ 5x + 2y + z = 2 \end{array} & \begin{array}{l} 2 \ 3 \ -1 \ 1 \\ 1 \ -1 \ 4 \ 6 \\ 5 \ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \end{array}$$

Mit der Dreiecksform kann man Rückwärts einsetzen  
Regeln beim Formen

Zeilentausch mit 1. Zeile, wenn Pivot  $\neq 0$  ist.  
oder

Numerisch ungünstig.

Daraufhin gleicher Spalten, wie inverse Matrix

### Wann 1. kleine Lösung

Wenn ein Zeile

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \text{ entsteht}$$

mit  $c \neq 0$

### Wann unendlich viele Lösungen

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

Daraufhin kann man  $x_4 = t$  setzen und nachwärts auflösen.

$$t \in \mathbb{R}$$

# Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$

## Allgemeine Form

$$z = a + bi$$

$a$  = Realteil

$b$  = Imaginärteil

## Darstellung

### Algebraisch / Normalform

$$z = a + bi$$

### Trigonometrische Form

$$z = |z| \cdot \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Betrag} = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{b}{a} \right)$$

## Berechnungen in Normalform

$$\oplus (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Realteil mit Realteil

Img Teil mit Img Teil

$$\ominus (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\odot (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$\odot$

## Berechnung in Trigonometrischer Form

①  $(|z_1| \cdot \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (|z_2| \cdot \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

②  $\frac{|z_1| \cdot \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{|z_2| \cdot \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

### Quadranten Winkel

$x, y$	$\varphi$ in Grad	$\varphi$ in Bogenmaß
$x > 0, y \geq 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$
$x < 0$ oder $x < 0, y < 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 180^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$
$x > 0, y < 0$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 360^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$
$x = 0, y > 0$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$x = 0, y < 0$	$\varphi = 270^\circ$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$x = 0, y = 0$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 0$

Formen, die man in der Trigonometrische Form berechnet.

Potenzen

$$z^n = |z|^n \cdot \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$$

n-te Wurzel von

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

$$, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

1. Trigonometrische Form zu Normalform

$$|z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

# Ableitungsregel

Summenregel:  $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

$$\Leftrightarrow (u + v)' = u' + v'$$

Bsp.  $f(x) = x^2 + \sin(x)$   $f'(x) = 2x + \cos(x)$

Faktorregel:  $(\alpha u)'(x) = \alpha u'(x)$

$$\Leftrightarrow (\alpha u)' = \alpha u'$$

Bsp.  $f(x) = 5x^3$   $f'(x) = 10x$

Produktregel:  $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\Leftrightarrow (uv)' = u'v + uv'$$

Bsp.  $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$   $f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

Quotientregel:  $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Bsp.  $f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$   $f'(x) = \frac{2x \sin(x) - x^2 \cos(x)}{(\sin(x))^2}$

Kettenregel:  $(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Bsp.  $u(x) = x^2$   $v(x) = \sin(x) \Leftrightarrow u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$$f(x) = (\sin(x))^2 \quad f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$u(x) = \sin(x) \quad v(x) = x^2$$

$$f(x) = \sin(x^2) = u(v(x)) \quad f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$a$	$0$	$(a \in \mathbb{R})$	$\sin(x)$
$x^a$	$ax^{a-1}$	$(a \in \mathbb{R})$	$\cos(x)$
$e^x$	$e^x$		$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$(x > 0)$	$\tan(x)$
$(\ln x)$	$\frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$	$\cot(x)$
$a^x$	$a^x \ln(a)$	$(a > 0)$	$\arcsin(x)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$(a > 0)$	$\arccos(x)$
			$\arctan(x)$
			$\frac{1}{1+x^2}$

## Logarithmisches Ableiten

Für das Ableiten von Funktion  $f$  der Gestalt

$$f(x) = u(x)^{v(x)}$$

mit  $u(x) > 0$  bietet sich folgendes Vorgehen an:

① Logarithmieren der Funktionsgleichung:

$$\ln(f(x)) = \ln(u(x)^{v(x)}) = v(x) \cdot \ln(u(x))$$

② Ableiten mittels Kettenregel und Produktregel

③ Auflösen nach  $f'(x)$

$$f(x) = x^{\cos x} \quad | \ln \quad (\text{für } x > 0)$$

$$\ln(f(x)) = \ln(x^{\cos x}) = \cos x \cdot \ln(x)$$

↓  
Kettenregel

↓  
Produktregel

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = -\sin(x) \cdot \ln(x) + \cos(x) \cdot \frac{1}{x} \quad | \cdot f(x)$$

$$f'(x) = x^{\cos(x)} \cdot \left( -\sin(x) \cdot \ln(x) + \cos(x) \cdot \frac{1}{x} \right)$$

# Berechnung der Grenzwerte

Bei  $n \rightarrow \infty$

① Zähler hat gleich Polenz wie Nenner

$$\frac{6n^3}{6n^3} = \frac{6n^3}{6n^3} = \frac{6}{6} = 1$$

eines von beiden höher ist

$$\frac{12n^3}{6n^3} = \frac{12n^3}{6n^3} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1} = 2$$

② Wenn längere Gleichung, dann ist egal

→ Es zählt nur die höchste Polenz!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{30000n^2 + 12n + 9}{8n^4 - 220n^3 + 1000n^2 + 1} = \frac{1 \cdot n^4}{8 \cdot n^4} \quad (da \text{ die höchste Polenz})$$

~~$\frac{30000}{n^2} + \frac{12}{n^3} + \frac{9}{n^4}$~~  fällt zu unendlich = 0

$= \frac{8}{n^2 + \frac{1000}{n^2} + \frac{1}{n^4}}$  fällt zu unendlich = 0

Grenzwert = 8

③ verschachtelte Funktion

$$\frac{2^{4n}}{4^{2n}} \text{ auflösen} = \frac{2^{2n} \cdot 2^{2n}}{2^{2n} \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{1}$$

④ Mit bsp aus 3

$$\frac{2^{2n} \cdot 2^{2n} + 12}{2^{2n} \cdot 2^{2n} + 1} = \frac{\infty + 12}{\infty + 1} = \frac{12}{1} = \underline{\underline{12}}$$

3

# Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn die Grenzwerte übereinstimmen

Funktion kann 2 bis drei Werte haben.

in das nach dem Diagramm sieben wir ein.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2} & \text{für } x > 2 \\ a^2 - 9 & \text{für } x = 2 \\ \sqrt{x^2 + 3x} & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

1 = Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2^+$   
weil  $x > 2$   
2 = Funktionswert  
3 = Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 3x$   
weil  $x < 2$

Wir berechnen zuerst die Grenzwerte.

Manche Formeln müssen vorerst umgestellt werden

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow \text{linear faktorisieren}$$

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x-1} \quad \leftarrow 2 \text{ einsetzen} = \frac{7}{1} = 7$$

Damit  $f(x)$  stetig ist muss auch der andere Grenzwert 7 sein

$$\sqrt{a^2 + 3a} = \sqrt{49} = 7$$

Danach löst man die Funktion / Funktionswert auf

$$= 7 = a^2 - 9$$

$$= 16 = a^2 \quad | \sqrt{ }$$

$$\underline{\underline{a = 4}}$$

Die Funktion ist stetig, wenn  $a = 4$  ist

## Grenzwerte

### Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}$$

Umformen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} &= \frac{1 \cdot (x^3-8)}{(x-2) \cdot (x^3-8)} - \frac{12 \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x^3-8)} \\ &= \frac{x^3-8-12x+24}{(x-2) \cdot (x^3-8)} \\ &= \frac{x^3-12x+16}{x^4-8x^3-2x^3+16} = \frac{x^3-12x+16}{x^4-2x^3-8x+16} \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-12x+16}{x^4-2x^3-8x+16} \xrightarrow{\substack{x^3-12x+16 \rightarrow 0 \\ x^4-2x^3-8x+16 \rightarrow 0}} \text{wean } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$$

für  $x=2$

die L'Hopital'sche Regel  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-12}{4x^3-6x^2-8} \xrightarrow{\substack{3x^2-12 \rightarrow 0 \\ 4x^3-6x^2-8 \rightarrow 0}} \text{dann nochmal } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g''(x)}{h''(x)}$$

nochmalige Anwendung

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x}{12x^2-12x} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

## Extrempunkte berechnen

- ① 1. und 2. Ableitung bilden
- ② 1. Ableitung = 0 setzen
- ③ mit 2. Ableitung prüfen
- ④ y-Koordinate berechnen

$$f(x) = \frac{1}{25} \cdot (x-5)^3 - 3x$$

$$f'(x) = \frac{1}{25} \cdot 3(x-5)^2 \cdot 1 - 3 = \frac{3}{25} \cdot (x-5)^2 - 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{25} \cdot 2 \cdot (x-5) = \frac{6}{25} \cdot (x-5)$$

$$f'(x) = 0 \quad \frac{3}{25} \cdot (x-5)^2 - 3 = 0$$

$$\frac{3}{25} \cdot (x-5)^2 = 3 \quad | : \frac{3}{25}$$

$$(x-5)^2 = 25 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$x-5 = \pm \sqrt{25} \quad | + 5$$

$$x = \pm 5 + 5$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 0$$

$$f''(x) = \frac{6}{25} \cdot (x-5) \quad x_1 = 10 \quad x_2 = 0$$

$$f''(10) = \frac{6}{25} \cdot f(10-5) = \frac{6}{25} \cdot 5 > 0 \quad \text{TP Tiefpunkt}$$

$\Rightarrow$  positiv Smiley 

$$f''(0) = \frac{6}{25} \cdot (0-5) = \frac{6}{25} \cdot (-5) < 0 \quad \text{negativ Smiley } \text{ HP Hochpunkt}$$

$$f(x) = \frac{1}{25} \cdot (x-5)^3 - 3x \quad x_1 = 10 \quad (\text{TP}) \quad x_2 = 0 \quad (\text{HP})$$

$$f(10) = \frac{1}{25} \cdot (10-5)^3 - 3 \cdot 10 = \frac{1}{25} \cdot 5^3 - 30 = \frac{125}{25} - 30 = -25$$

$$\Rightarrow (10 | -25)$$

$$f(0) = \frac{1}{25} \cdot (0-5)^3 - 3 \cdot 0 = -5 \quad \Rightarrow (0 | -5)$$

1

## Wendepunkte berechnen

- ① 2. und 3. Ableitung bilden
- ② 2. Ableitung = 0 setzen
- ③ mit 3. Ableitung prüfen
- ④ y-Koordinate berechnen

①  $f''(x) = \frac{6}{25} \cdot (x-5)$

$$f'''(x) = \frac{6}{25} \cdot (1) = \frac{6}{25}$$

②  $f''(x) = 0 \quad \frac{6}{25} \cdot (x-5) = 0 \quad | : \frac{6}{25}$   
 $x-5 = 0 \quad | +5$   
 $x = 5$

③  $f'''(5) = \frac{6}{25} \neq 0 \Rightarrow$  Wendepunkt bei  $x=5$

④  $f(5) = \frac{1}{25} \cdot (5-5)^3 - 3 \cdot 5 = -15$

$$WP = (5 | -15)$$

## Sattelpunkt

ist wenn 1. Ableitung = 0  
2. Ableitung = 0  
3. Ableitung  $\neq 0$

bzw. wenn keine Hoch- oder Tiefpunkte vorhanden

graphisch etwa:



## Integralrechnung

Hauptzweck der Differenzial- und Integralrechnung

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel  $f(x) = x^2$   $F(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\int_a^b x^2 dx = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Beispiel  $f(x) = x^3$   $F(x) = \frac{x^4}{4}$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x^3 dx = F(b) - F(a) = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

$$\int_0^2 x^3 dx = F(2) - F(0) = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{2^4}{4} = 4$$

Beispiel  $f(x) = x^n$   $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int_a^b x^n dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Beispiel  $f(x) = \cos(x)$   $F(x) = \sin(x)$

$$\int_a^b \cos(x) dx = \sin(b) - \sin(a)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

## Integralrechnung

Beispiel  $f(x) = \frac{1}{x}$   $F(x) = \ln(x)$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{für } a, b > 0$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln(e) = 1$$

Beispiel Flächen zwischen Funktionen

$$f(x) = x \quad g(x) = x^2 \quad \text{Schnittpunkte!} = 0 \text{ und } 1$$

$$\text{Fläche} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Allgemeine Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Unbestimmte Integrale = Stammfunktion = Integrale ohne Grenzen

Tabelle mit Beispielen

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln(x)$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{x}, x < 0$	$\ln(-x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x $	$-\frac{1}{x^2+1}$	$\text{arc cot}(x)$
$e^x$	$e^x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$		

# Integralrechnung

Beispiel  $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 \int x^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 3\sqrt[3]{x} \, dx + 2 \int \sqrt{x} \, dx \\
 &= \int x^2 \, dx - \int x^{\frac{1}{3}} \, dx + 2 \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\
 \Rightarrow \left( \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \right) &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C
 \end{aligned}$$

Beispiel  $f(t) = \frac{\cos(\alpha)}{1+t^2}$

$$\int \frac{\cos(\alpha)}{1+t^2} \, dt = \cos(\alpha) \int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \cos(\alpha) \cdot \arctan(t) + C$$

$\hookrightarrow \cos(\alpha)$  ist hier eine Konstante!

Beispiel  $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$

$$\int \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{1+x^2} \int \cos(x) \, dx = \frac{1}{1+x^2} \cdot \sin(x) + C$$

Beispiel  $f(x) = \frac{1-x \cdot e^{x+2}}{x}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1-x \cdot e^{x+2}}{x} \, dx &= \int \frac{1}{x} - e^{x+2} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx - \int e^{x+2} \, dx \\
 &= C_n |\ln|x| - e^{x+2} \cdot \int e^x \, dx \\
 &= C_n |\ln|x| - e^2 \cdot e^x + C \\
 &= C_n |\ln|x| - e^{x+2} + C
 \end{aligned}$$

Beispiel  $f(x) = \tan^2(x)$

$$\begin{aligned}
 \int \tan^2(x) \, dx &= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx \\
 &= \int \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx - \int 1 \, dx \\
 &= \tan(x) - x + C
 \end{aligned}$$

## Integralrechnung

Beispiel  $f(x) = \frac{10x^2 - 7x - 17}{2x-3}$

Polynomdivision mit  $(2x-3)$

$$(10x^2 - 7x - 17) : (2x-3) = 5x + 4 - \frac{5}{(2x-3)}$$

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 7x - 17 \\ 10x^2 - 15x \\ \hline 8x - 12 \\ \hline -5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{10x^2 - 7x - 17}{2x-3} dx &= \int 5x + 4 dx - 5 \cdot \int \frac{1}{2x-3} dx \\ &= \frac{5}{2}x^2 + 4x - 5 \ln|2x-3| + C \end{aligned}$$

## Partielle Integration

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, differenzierbar

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

## Beispiel $\int x \cdot \sin(x) dx$

$$\int x \cdot \sin(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x) - \int \frac{x^2}{2} \cos(x) dx$$

$$\rightarrow f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} \quad g(x) = \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x)$$

Das ist wenig hilfreich! Also anders ran!

$$\rightarrow g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \quad f'(x) = \sin(x) \Rightarrow f(x) = -\cos(x)$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin(x) dx &= (-\cos(x)) \cdot x - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Bei Funktionen der Form  $x^n \cdot$  irgendwas meistens

$$g(x) = x^n!$$

4

## Integralrechnung

Beispiel  $\int x^2 \cdot e^x dx$

$$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x \quad f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x dx &= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx \end{aligned}$$

$$g(x) = x \quad g'(x) = 1 \quad f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

einsetzen in Ursprung:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$$

Beispiel  $\int \ln(x) dx$

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$f'(x) = 1 \quad f(x) = x \quad g(x) = \ln(x) \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C \end{aligned}$$

Beispiel  $\int \sin^2(x) dx$

$$\int \sin^2(x) dx = \int \sin(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$f'(x) = \sin(x) \quad f(x) = -\cos(x) \quad g(x) = \sin(x) \quad g'(x) = \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= -\cos(x) \cdot \sin(x) - \int (-\cos(x)) \cdot \cos(x) dx \\ &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \cos^2(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \sin(x) \cdot \cos(x) - \int \sin(x) (-\sin(x)) dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

## Integralrechnung

$$\Rightarrow \text{Pythagoras: } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x) dx &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \cos^2(x) dx \\ &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 - \sin^2 x dx \\ &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 dx - \int \sin^2 x dx \\ &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \sin^2(x) dx\end{aligned}$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \sin^2(x) dx$$

$$2 \cdot \int \sin(x) dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + x$$

$$\int \sin(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos(x) \cdot \sin(x) + C$$

Beispiel  $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos(x) \cdot \sin(x) + C$

Beispiel  $\int x e^{x^2} dx$

eignet sich nicht für partielle Integration wegen  $e^{x^2}$

## Substitutionsregel

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, differenzierbar

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) dg$$

oder

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(g) dg$$

## Beispiel

$$\int (x+3)^n dx = \int g'(x) \cdot g(x)^n dx = \int g^n dg = \frac{g^{n+1}}{n+1} = \frac{(x+3)^{n+1}}{n+1}$$

# Integralrechnung

Beispiel  $\int_{-1}^0 \sqrt{1-2x} dx$

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-2x} dx$$

$$= \int_3^1 \sqrt{u^1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

$$u = 1 - 2x$$

$$u' = -2 \quad u' = \frac{du}{dx}$$

$$-2 = \frac{du}{dx} \quad 1 \cdot dx$$

$$-2 \cdot dx = du \quad | :(-2)$$

$$dx = \frac{du}{-2} = du \cdot \frac{1}{-2}$$

1. und 3. berechnet man

aus  $1-2x$  indem man

die x-Grenzen (-1) und 0

für x eingesetzt:  $1-2 \cdot (-1) = 3$ ,  $1-2 \cdot 0 = 1$

$$\int_3^1 \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = \int_3^1 -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{3}{2}} \right]_3^1 = \left[ -\frac{1}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} \right]_3^1$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 1,4$$

Daselbe Beispiel ohne Grenzen:

$$\int \sqrt{1-2x} dx \quad u = 1-2x$$

$$= \left[ \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot u^{\frac{3}{2}} \right] = \left[ \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (1-2x)^{\frac{3}{2}} + C \right]$$

# Integralrechnung

$$\int_0^2 4x^3 \cdot e^{x^4+2} dx$$
$$a = x^4 + 2$$
$$a' = \frac{da}{dx} = 4x^3$$
$$da = 4x^3 \cdot dx$$
$$= \int_2^{18} e^u du$$
$$= [e^u]_2^{18} = e^{18} - e^2$$

## 2.2 Substitutionsregel

Ich komme noch einmal zurück auf das Integral aus Beispiel 2.3.

### Beispiel 2.4:

Zur Berechnung  $\int xe^{x^2} dx$  kann man auch anders vorgehen. Wenn Sie die Funktion  $F(x) = e^{x^2}$  ableiten, dann finden Sie mit der Kettenregel  $F'(x) = 2xe^{x^2}$ .



Daher ist  $\frac{1}{2}e^{x^2}$  eine Stammfunktion von  $xe^{x^2}$  und es folgt

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Beispiel 2.4 zeigt, dass es auch noch Produkte ganz anderer Art gibt, als sie bei der partiellen Integration vorkommen. Offenbar haben sie etwas mit der Kettenregel zu tun, in der ja das Produkt aus äußerer und innerer Ableitung auftritt, und es wird mir jetzt darum gehen, den Nutzen der Kettenregel für die Integralrechnung herauszufinden.

### Bemerkung

Ist  $f$  eine stetige Funktion,  $g$  eine differenzierbare Funktion und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so gilt nicht nur  $F'(x) = f(x)$ , sondern aus der Kettenregel folgt auch:

$$F(g(x))' = g'(x) \cdot F'(g(x)) = g'(x) \cdot f(g(x))$$

denn schließlich ist  $F' = f$ . Deshalb ist  $F(g(x))$  Stammfunktion von  $g'(x) \cdot f(g(x))$  und in der Integralschreibweise heißt das

$$\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = F(g(x))$$

Man kann also dieses Integral berechnen, indem man eine Stammfunktion von  $f$  heranzieht und in diese Stammfunktion die **innere Funktion**  $g$  einsetzt. Im Beispiel 2.4 war  $g(x) = x^2$  und  $f(x) = e^x$  mit der Stammfunktion  $F(x) = e^x$ . Somit ergibt sich

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = F(g(x)) = e^{x^2}$$

Um sich nicht mit dem Namen  $F$  einer Stammfunktion zu belästigen, schreibt man für  $F(g(x))$  auch oft  $\int f(g) dg$  und beschreibt damit, dass in die Stammfunktion  $F$  die innere Funktion  $g$  eingesetzt wird. In unserem Beispiel ist dann

$$\int f(g) dg = \int e^g dg = e^g = e^{x^2}$$

und wir haben natürlich wieder das gleiche Ergebnis.

Diese Integrationsmethode beruht auf der Idee, die innere Funktion  $g(x)$  als neue Variable zu verwenden und  $f$  nach der Variablen  $g$  zu integrieren. Man substituiert also die gesamte Funktion  $g(x)$  durch den schlichten Buchstaben  $g$ , und deshalb sprechen wir hier von der *Substitutionsregel*. Ich fasse sie noch einmal im nächsten Satz zusammen und rechne anschließend einige Beispiele.

**Satz 2.2: (Substitutionsregel)**

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, deren Wertebereich ganz im Definitionsbereich von  $f$  liegt. Dann ist

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) dg$$

Man schreibt auch oft

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(g) dg$$

**Beweis:**



Eigentlich habe ich alles schon in der Bemerkung auf Seite 35 nachgerechnet, aber ich möchte doch noch ein paar Worte sagen. In der Bemerkung auf Seite 35 haben Sie gesehen, dass man aus der Stammfunktion  $F(x) = \int f(x) dx$  von  $f$  ganz schnell eine Stammfunktion von  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  machen kann, indem man die zusammengesetzte Funktion  $F(g(x))$  heranzieht. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist dann

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) dg$$

denn  $F$  ist Stammfunktion von  $f$ , und deshalb ist  $\int f(g) dg = F(g)$ .

Wie muss man also vorgehen, wenn man eine Funktion der Form  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  zu integrieren hat? Man integriere zuerst  $f$  nach der etwas ungewohnten Variable  $g$  und setze in das Ergebnis dann wieder ein, was  $g$  in Wahrheit gewesen ist. Wir sehen uns dazugeleich eine ganze Reihe Beispiele an, aber vorher möchte ich Ihnen noch eine kleine Merkhilfe für die Substitutionsregel geben.

**Bemerkung**

Im Studienheft über Differenzialrechnung hatte ich Ihnen erklärt, dass man die Ableitung von  $g$  auch oft als  $g'(x) = \frac{dg}{dx}$  schreibt. In diesem Fall lässt sich das gesuchte Integral auch schreiben als

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(g(x)) \frac{dg}{dx} dx = \int f(g) dg$$

da sich die Größe  $dx$  herauskürzt. Wir kürzen damit zwar in bester Leibniz-Manier eine „unendlich kleine Größe“, aber das Ergebnis stimmt, und vielleicht kann man sich die Substitutionsregel auf diese Weise etwas besser merken. Wie Sie hier sehen können, beruht sie nur darauf, den Ausdruck  $g'(x) dx$  durch den gleichwertigen Ausdruck  $dg$  zu ersetzen und für einen Augenblick zu vergessen, dass die ursprüngliche Integrationsvariable  $x$  heißt.

Jetzt ist es aber endgültig Zeit für Beispiele.

**Beispiel 2.5:**

- a) Ich kehre zurück zu Beispiel 2.4, berechne also das Integral  $\int xe^{x^2} dx$ . Leider ist  $x$  nicht die Ableitung von  $x^2$ , sodass ich eine kleine Korrektur vornehmen muss, indem ich schreibe

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx$$

Das ist erlaubt, denn konstante Faktoren darf ich nach Belieben vor das Integral ziehen. Jetzt hat das Integral die Form, die ich für die Substitutionsregel brauche, und ich setze  $g(x) = x^2$ . Dann ist  $g'(x) = 2x$  und es folgt:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^g dg = \frac{1}{2} e^g = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{aligned}$$

Dabei habe ich nur  $g'(x) dx$  durch  $dg$  ersetzt und damit das Integral auf  $\int e^g dg$  reduziert.

- b) Gesucht ist  $\int (x+3)^n dx$ . Bedenken Sie, dass  $g(x)$  immer eine innere Funktion sein muss, also eine Funktion, mit der noch etwas angestellt werden sollte. Einziger Kandidat dafür ist  $g(x) = x + 3$ , und das trifft sich auch gut, denn es gilt  $g'(x) = 1$ , sodass ich mir um den Faktor  $g'(x)$  keine Sorgen machen muss. Für das Integral findet man

$$\int (x+3)^n dx = \int g'(x) \cdot g(x)^n dx = \int g^n dg = \frac{g^{n+1}}{n+1} = \frac{(x+3)^{n+1}}{n+1}$$

Das Prinzip ist auch hier nicht anders als in Teil a). Wesentlich ist, dass Sie eine innere Funktion  $g(x)$  identifizieren und an der richtigen Stelle  $g'(x) dx$  durch  $dg$  ersetzen.

- c) Jetzt gehe ich einen Schritt weiter und berechne  $\int (2x+3)^n dx$ . Natürlich muss  $g(x) = 2x + 3$  sein, und um den Faktor  $g'(x) = 2$  in das Integral zu bekommen, mache ich das gleiche Spiel wie in Teil a). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\int (2x+3)^n dx &= \frac{1}{2} \int 2 \cdot (2x+3)^n dx = \frac{1}{2} \int g'(x) \cdot g(x)^n dx \\ &= \frac{1}{2} \int g^n dg = \frac{1}{2} \frac{g^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(2x+3)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass das Ausgleichen der Faktoren  $\frac{1}{2}$  und 2 nur dann erlaubt ist, wenn es sich um *konstante* Faktoren handelt; Sie dürfen auf keinen Fall ganze Funktionen nach Belieben aus dem Integral hinaus- oder hineinziehen. Nur wenn es sich um Konstanten handelt, kann man mit dieser Methode eine nicht ganz vollständige Ableitung in die passende Form bringen.

- d) Ich zeige das noch einmal am Beispiel der Funktion  $(ax+b)^n$  mit  $a \neq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Ich werde dabei allerdings keine Kommentare mehr abgeben, sondern nur die Rechnung vorführen. Sie werden sehen, dass sie mit der Rechnung aus dem letzten Beispiel fast identisch ist. Wir setzen also  $g(x) = ax + b$  und finden:

$$\begin{aligned}\int (ax+b)^n dx &= \frac{1}{a} \int a \cdot (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int g'(x) \cdot g(x)^n dx \\ &= \frac{1}{a} \int g^n dg = \frac{1}{a} \frac{g^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

- e) Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass ich bisher zwar  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\tan^2$  integriert habe, aber der Tangens selbst noch nicht erwähnt worden ist. Der Grund ist einfach: Sie können die Tangensfunktion nicht ohne die Substitutionsregel integrieren. Es ist ja

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

und der Sinus ist zwar nicht ganz die Ableitung des Cosinus, aber doch immerhin bis auf ein Minuszeichen. Wir können also  $g(x) = \cos x$  setzen und dann mit einer kleinen Manipulation die Substitutionsregel anwenden. Da nun einmal  $g'(x) = -\sin x$  gilt, brauche ich den Faktor  $-\sin x$  im Integral, den ich mir wie in den anderen Beispielen verschaffen kann. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = - \int g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} dx \\ &= - \int \frac{1}{g} dg = -\ln|g| = -\ln|\cos x|\end{aligned}$$

Mit der Zeit haben Sie sich wohl an das Prinzip gewöhnt. Sie suchen sich eine Funktion  $g$ , deren Ableitung mehr oder weniger deutlich im Integral vorkommt, schreiben das Integral so um, dass  $g'(x)$  und  $g(x)$  zu erkennen sind, und ersetzen dann  $g'(x) dx$  durch  $dg$ .

- f) Nach dem gleichen Schema berechne ich  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ . Das ist zwar ein Quotient, aber man kann ihn auf die übliche Weise leicht als Produkt

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx$$

schreiben. Besser kann man es nicht mehr treffen, denn  $\frac{1}{x}$  ist die Ableitung des Logarithmus, und wir werden deshalb  $g(x) = \ln x$  setzen. Dann ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx &= \int g'(x) \cdot g(x) dx = \int g dg \\ &= \frac{g^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} \end{aligned}$$

Ich hoffe, das Prinzip der Substitutionsregel ist aus diesen Beispielen klar geworden. Wann immer Sie also in Zukunft ein Produkt zu integrieren haben, das man nicht schnell auf eines der Grundintegrale in Beispiel 1.7 zurückführen kann, sollten Sie sich überlegen, ob es ein Fall für die partielle Integration oder eher für die Substitutionsregel ist. Falls Sie dabei auf eine Funktion  $g$  stoßen, die in irgendeiner Weise im Integral auftaucht, und auch noch ihre Ableitung  $g'$  als Faktor vorfinden, lohnt sich ein Versuch mit der Substitutionsregel.

Zum Schluss dieses Abschnittes möchte ich Ihnen noch eine etwas exotischere Anwendung der Substitutionsregel vorstellen. Bisher haben wir die Regel immer von „links nach rechts“ gelesen, das heißt, das gesuchte Integral stand uns in der Form  $\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx$  zur Verfügung und wir haben es umgeformt in  $\int f(g) dg$ . Zuweilen ist es auch sinnvoll, umgekehrt vorzugehen.

### Beispiel 2.6:

Sie kennen die Substitutionsregel in der Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(g) dg$$

Da die Namen der Variablen und Funktionen keine Bedeutung haben, benenne ich sie ein wenig um und schreibe

$$\int f(x(t)) \cdot x'(t) dt = \int f(x) dx$$

Die Rolle der alten Variablen  $x$  hat jetzt die neue Variable  $t$  übernommen, und die alte Funktion  $g$  habe ich durch die neue Funktion  $x$  ersetzt. Der Aufbau der Formel ist aber genau gleich geblieben. Der Vorteil besteht darin, dass ich jetzt auf der rechten Seite ein schlichtes Integral  $\int f(x) dx$  stehen habe und dieses Integral vielleicht mithilfe der linken Seite ausrechnen kann. Wenn ich zum Beispiel  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  berechnen will, so setze ich

$$x(t) = \sin t$$

und finde mit der von rechts nach links gelesenen Substitutionsregel:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot x'(t) dt = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt$$

Das ist günstig, denn wie Sie wissen ist  $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$  und es folgt

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c$$

wobei Sie die letzte Gleichung dem Beispiel 2.2 d) entnehmen können. Wir haben also die Gleichung

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c$$

gewonnen, und die nützt uns zunächst überhaupt nichts, weil wir mit einer Funktion in  $x$  gestartet sind und auch als Ergebnis gern eine Stammfunktion in  $x$  hätten. Das ist aber leicht zu erreichen, denn ich kenne den Zusammenhang zwischen  $x$  und  $t$ . Ich habe nämlich definiert

$$x = \sin t, \text{ und daraus folgt } t = \arcsin x$$

Folglich ist

$$\sin t = \sin(\arcsin x) = x$$

und

$$\cos t = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

Jetzt brauchen Sie nur noch oben einzusetzen und finden

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + c$$

Diese Art, mit der Substitutionsregel umzugehen, ist sicher nicht ganz einfach und ich will Ihnen auch nichts vormachen: Um die richtige Substitution  $x(t) = \sin t$  zu wählen, muss man im Grunde zumindest eine vage Vorstellung davon haben, was für ein Endergebnis herauskommen wird, denn sonst fällt die Entscheidung für den Sinus doch reichlich unvermittelt vom Himmel. Aber manchmal kommt man an ein Integral leider nur über diese Methode heran und deshalb schadet es nichts, sich ein wenig mit ihr vertraut zu machen. Wir sehen uns also noch ein weiteres Beispiel an.

**Beispiel 2.7:**

Ich will das Integral  $\int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}} dx$  ausrechnen. Auf den ersten Blick sieht das etwas hoffnungslos aus, denn man findet keinen geeigneten Kandidaten für  $g$ . Das täuscht aber. Tatsächlich wäre es möglich, die Sache auf die übliche Weise mit der von links nach rechts gelesenen Substitutionsregel für  $g(x) = \sqrt{x}$  zu erledigen, aber das wäre ein gewisser Aufwand, der hier gar nicht nötig ist. Einfacher ist es, die Regel wie in Beispiel 2.6 zu verwenden, also in der Form

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

Und auch das passende  $x(t)$  ist schnell gefunden: Da mich doch am meisten die vor kommende Wurzel stört, werde ich  $x(t) = t^2$  setzen, was den angenehmen Effekt hat, dass beim Einsetzen die Wurzel verschwindet. Es folgt also:

$$\begin{aligned} \int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{2-x(t)}{1+\sqrt{x(t)}} \cdot x'(t) dt \\ &= \int \frac{2-t^2}{1+\sqrt{t^2}} \cdot 2t dt \\ &= \int \frac{4t-2t^3}{1+t} dt \end{aligned}$$

denn noch immer ist  $\sqrt{t^2} = t$ . Nun habe ich eine rationale Funktion im Integral stehen, die ich mit ein wenig Polynomdivision leicht vereinfachen kann. Es gilt nämlich:

$$\begin{array}{r} (-2t^3 + 4t) : (t + 1) = -2t^2 + 2t + 2 - \frac{2}{t+1} \\ \underline{-2t^3 - 2t^2} \\ 2t^2 + 4t \\ \underline{2t^2 + 2t} \\ 2t \\ \underline{-2} \end{array}$$

Daher ist

$$\int \frac{4t-2t^3}{1+t} dt = \int -2t^2 + 2t + 2 - \frac{2}{t+1} dt = -\frac{2}{3}t^3 + t^2 + 2t - 2\ln|t+1|$$

Ausgegangen bin ich aber von dem Integral mit der Integrationsvariablen  $x$ , und aus  $x = t^2$  bzw.  $t = \sqrt{x}$  folgt damit:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{4t-2t^3}{1+t} dt \\
 &= \int -2t^2 + 2t + 2 - \frac{2}{t+1} dt \\
 &= -\frac{2}{3}t^3 + t^2 + 2t - 2\ln|t+1| \\
 &= -\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| \\
 &= -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1|
 \end{aligned}$$

Schön ist das nicht, aber selten. Immerhin zeigt dieses Beispiel, dass es sinnvoll ist, etwas über das Integrieren rationaler Funktionen zu wissen, und genau darüber werde ich mich im nächsten Abschnitt befassen. Zunächst aber noch ein grundsätzliches Wort zu bestimmten Integralen. Ich habe hier sehr bewusst darauf verzichtet, *bestimmte* Integrale auszurechnen, weil bei der Substitutionsregel die Integrationsgrenzen sich verändern und diese Veränderung immer wieder zu Verwirrungen führt. Wenn Sie ein bestimmtes Integral mithilfe der Substitutionsregel auszurechnen haben, dann empfehle ich Ihnen, erst das unbestimmte Integral zu finden und sich erst dann, sobald die Stammfunktion zur Hand ist, um die Grenzen zu kümmern. Alles andere macht nur Ärger.

Bitte lösen Sie jetzt die Aufgaben zur Selbstüberprüfung 2.4–2.9.

### 2.3 Partialbruchzerlegung

In Beispiel 2.7 habe ich eine rationale Funktion integriert, indem ich erst eine Polynomdivision durchgeführt und dann die einzelnen Summanden integriert habe. Das ging deshalb so einfach, weil der Nenner nur aus einem Polynom vom Grad 1 bestand. Bei aufwendigeren Nennern muss man auch aufwendigere Methoden verwenden, und die Standardmethode zur Integration rationaler Funktionen ist die **Partialbruchzerlegung**. Der Name sagt schon, worauf es hinausläuft: Man zerlegt den komplizierteren Bruch in einfachere Teilbrüche, die sich dann hoffentlich leichter integrieren lassen.



#### Beispiel 2.8:

Gesucht ist

$$\int \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx$$

Da  $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$  gilt, machen wir den Ansatz

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Wenn ich jetzt die Werte von  $A$ ,  $B$  und  $C$  wüsste, dann könnte ich die Funktion leicht integrieren, denn jeder der drei Teilbrüche hat einen Logarithmus als Stammfunktion. Ich muss mich deshalb daran machen, die Zahlen  $A$ ,  $B$  und  $C$  herauszufinden. Zuerst beseitige ich die Brüche, indem ich mit dem Hauptnenner durchmultipliziere. Es folgt:

$$\begin{aligned} 6x^2 - x + 1 &= A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \\ &= A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x) \\ &= x^2(A + B + C) + x(B - C) - A \end{aligned}$$

Nur der letzte Schritt bedarf einer Erklärung. Ich habe das Polynom aus der zweiten Zeile nach Potenzen von  $x$  geordnet, und  $x^2$  hat genau die Faktoren  $A$ ,  $B$  und  $C$ , während  $x$  mit den Faktoren  $B$  und  $-C$  versehen ist.

Jetzt haben wir links und rechts vom Gleichheitszeichen je ein Polynom stehen. Da die Gleichung

$$6x^2 - x + 1 = x^2(A + B + C) + x(B - C) - A$$

gelten soll, müssen die Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen jeweils gleich sein. Schließlich würden Sie auch sofort die Polynome  $x^2 + 1$  und  $2x^2 + 1$  als verschieden erkennen, weil sie sich im Koeffizienten von  $x^2$  unterscheiden. In unserem Beispiel muss deshalb gelten:

$$A + B + C = 6, \quad B - C = -1, \quad -A = 1$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten, auch wenn die Gleichungen nebeneinander stehen anstatt untereinander. In den entsprechenden Studienheften haben Sie gelernt, wie man so etwas löst, und ich verzichte deshalb darauf, die Rechnung vorzuführen. Das Ergebnis ist jedenfalls

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 4$$

Folglich kann man den ursprünglichen Bruch zerlegen in

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}$$

und für das Integral bedeutet das

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\ln|x| + 3 \ln|x-1| + 4 \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz kann man beliebige rationale Funktionen integrieren. Sie müssen nur den Nenner in seine **Linearfaktoren** zerlegen und davon ausgehend die rationale Funktion als Summe einfacherer Brüche schreiben. Leider sind die Beispiele nicht immer ganz so einfach wie in Beispiel 2.8, und wir sollten erst einmal notieren, wie

die Zerlegung in Teilbrüche im Einzelnen vor sich geht. Eben habe ich den Nenner in Faktoren zerlegt, und deshalb gehen wir für den Anfang der Frage nach, wie man das mit beliebigen Polynomen macht.

**Satz 2.3:**

Es sei  $p$  ein Polynom. Dann kann man  $p$  zerlegen in ein Produkt aus **Linearfaktoren**  $(x - a)^m$  und **quadratischen Faktoren**  $(x^2 + px + q)^k$ , wobei man die Faktoren  $x^2 + px + q$  nicht mehr weiter in Linearfaktoren zerlegen kann, weil sie keine reellen Nullstellen haben.

Das ist das alte Problem, mit dem wir schon hin und wieder zu tun hatten: Manche Polynome haben eben auch komplexe Nullstellen und man kann nicht erwarten, daraus reelle Linearfaktoren zu berechnen. Sehen wir uns schnell zwei Beispiele an.

**Beispiel 2.9:**



- a) Es sei  $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ . Man rechnet leicht nach, dass man  $p$  zerlegen kann in die Faktoren  $p(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$ . Dabei hat  $x^2 + x + 1$  die Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

besitzt also keine reellen Nullstellen und ist deswegen auch nicht in reelle Linearfaktoren zerlegbar.

- b) Es sei  $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$ . Dann ist  $p(x) = x(x - 1)^2$ . Ein Faktor kann also auch mehrfach auftreten, wie Sie hier am Beispiel des Faktors  $x - 1$  sehen.

Noch einmal muss ich mich auf die Vorgehensweise aus Beispiel 2.8 berufen. Dort hatte ich den *Nenner* der rationalen Zahl in seine Faktoren zerlegt und dann die passenden Summanden aufgeschrieben. Das kann man mit jeder rationalen Funktion machen, man muss nur auf die mehrfach auftretenden Faktoren achten. Ein mehrfacher Faktor wird auch mehrere Summanden erzeugen.

**Satz 2.4:**



Es sei  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eine rationale Funktion, wobei der Grad von  $p$  kleiner sei als der Grad von  $q$ . Dann kann man  $r$  zerlegen in Summanden der folgenden Form.

- a) Ist  $(x - a)^m$  ein  $m$ -facher Linearfaktor des Nennerpolynoms  $q$ , so hat  $r$  die Summanden

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - a)^m}$$

- b) Ist  $(x^2 + px + q)^k$  ein  $k$ -facher quadratischer Faktor des Nennerpolynoms  $q$ , so hat  $r$  die Summanden

$$\frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 + C_2 x}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_k + C_k x}{(x^2 + px + q)^k}$$

# Partialbruchzerlegung Komplexe Nullstelle

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 1 &= 0 \quad \text{für } x = -1 \checkmark \\ (x^3 + x^2 + x + 1) : (x+1) &= x^2 + 1 \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ & \begin{array}{c} x+1 \\ -(x+1) \\ \hline 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1) \cdot (x^2 + 1)$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad | -1$$

$$x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{-1} \quad \text{keine weitere reelle Nullstelle}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2}{(x+1) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \quad | \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 1)$$

Normale Vorgehensweise, wird abgekürzt:

$$x^2 - 2 = x^2(A + B) + x(B + C) + (A + C)$$

$$\Rightarrow 1 = A + B \Rightarrow B = 1 - A$$

$$0 = B + C \Rightarrow 0 = 1 - A - 2 - A = -2A - 1$$

$$-2 = A + C \Rightarrow C = -2 - A \quad \begin{array}{l} 0 = -2A - 1 \\ 2A = -1 \\ A = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2 - 2}{(x+1) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}}{2(x^2 + 1)}$$